# Architecture des ordinateurs et systèmes d'exploitation

# Corrigé du TD 3: Algèbre de BOOLE

Marcel Bosc    Christophe Dehlinger    Arnaud Giersch    Mathieu Haefele
Benoît Meister    Nicolas Passat

1. Montrer comment l'opérateur **et** peut être obtenu à partir des opérateurs **ou** et **non**. De même pour l'opérateur **ou** avec les opérateurs **et** et **non**.

   **Correction :** *non(a ou b) = (non a) et (non b)* $\Rightarrow$ *non((non a) ou (non b)) = a et b*
   *non(a et b) = (non a) ou (non b)* $\Rightarrow$ *non((non a) et (non b)) = a ou b*

2. On note respectivement les opérateurs **ou**, **et**, **xor** et **non** par $+, \cdot, \oplus$ et $\overline{\phantom{x}}$. Montrer à l'aide de tables de vérité que $A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$ et que $A \oplus B = (A+B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$

   **Correction :** *Tables de vérités :*

| $A$ | $B$ | $\overline{A}$ | $\overline{B}$ | $A \oplus B$ | $\overline{A} \cdot B$ | $A \cdot \overline{B}$ | $\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| $A$ | $B$ | $\overline{A}$ | $\overline{B}$ | $A \oplus B$ | $A+B$ | $\overline{A}+\overline{B}$ | $(A+B) \cdot (\overline{A}+\overline{B})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

3. Montrer que $A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$ et que $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

   **Correction :** *On utilise la distributivité de l'opérateur* **ou** *sur l'opérateur* **et**, *et inversement :*

$$A + (\overline{A} \cdot B) = (A + \overline{A}).(A+B) = 1.(A+B) = A+B$$
$$A \cdot (\overline{A} + B) = (A \cdot \overline{A}) + (A \cdot B) = 0 + (A \cdot B) = A \cdot B$$

4. Déterminer le complément de l'expression $A + \overline{B} \cdot C$

   **Correction :** *On utilise les lois de de Morgan ; l'opérateur* **et** *est prioritaire :*

$$\overline{A + \overline{B} \cdot C} = \overline{A} \cdot \overline{\overline{B} \cdot C} = \overline{A} \cdot (B + \overline{C}) = \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{C}$$

5. Montrer que les deux règles d'associativité sont duales, i.e. montrer qu'à partir de la règle d'associativité de l'opérateur **ou**, on peut déduire, en utilisant les lois de de Morgan, l'associativité de l'opérateur **et** (et inversement).

   **Correction :**

$$A + (B + C) = (A+B) + C \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A + (B+C)} = \overline{(A+B)+C} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} \cdot (\overline{B} \cdot \overline{C}) = (\overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot \overline{C}$$

   *A, B, et C sont des variables muettes. Par changement de variable* $\{(\overline{A} \rightarrow A'), (\overline{B} \rightarrow B'), (\overline{C} \rightarrow)C'\}$ *on obtient la propriété d'associativité du* **ou** *:* $A' \cdot (B' \cdot C') = (A' \cdot B') \cdot C'$

6. Écrire l'expression $\overline{A\oplus B}$ uniquement avec les opérateurs **ou**, **et** et **non**

   **Correction :** *D'après 2. :*

$$A\oplus B=\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{A\oplus B}=\overline{\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{A\oplus B}=(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B)$$

7. Montrer que la fonction **nor** forme un groupe logique complet.

   **Correction :** *Pour cela, on montre que la fonction* **nor** *permet d'exprimer tous les opérateurs logiques :*
   - **non** *:* $nor(A,A)=\overline{A}$
   - **et** *:* $nor(nor(A,A),nor(B,B))=nor(\overline{A},\overline{B})=\overline{\overline{A}+\overline{B}}=A\cdot B$
   - **ou** *:* $nor(nor(A,B),nor(A,B))=\overline{nor(A,B)}=\overline{\overline{(A+B)}}=(A+B)$.

8. Simplifier au maximum les expressions logiques suivantes.

   (a) $\overline{A}\cdot B+A\cdot B$

   **Correction :**

$$\overline{A}\cdot B+A\cdot B=(\overline{A}+A)\cdot B=1\cdot B=B$$

   (b) $(A+B)\cdot(A+\overline{B})$

   **Correction :**

$$(A+B)\cdot(A+\overline{B})=A+B\cdot\overline{B}=A+0=A$$

   (c) $A+A\cdot B$

   **Correction :**

$$A+A\cdot B=A\cdot 1+A\cdot B=A\cdot(1+B)=A\cdot 1=A$$

   (d) $A\cdot(A+B)$

   **Correction :**

$$A\cdot(A+B)=(A+0)\cdot(A+B)=A+0\cdot B=A+0=A$$

   (e) $\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A+B+C+D}$

   **Correction :**

$$\begin{aligned}\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A+B+C+D}&=\overline{(A+B)\cdot(A+B+C+D)}\\&=\overline{(A+B)\cdot((A+B)+(C+D))}\end{aligned}$$

   *donc, d'après l'exercice 8d,*

$$=\overline{A+B}$$

   (f) $A+B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot(\overline{B\cdot\overline{C}})\cdot(A\cdot D+B)$

   **Correction :**

$$A+B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot(\overline{B\cdot\overline{C}})\cdot(A\cdot D+B)=(A+B\cdot\overline{C})+(\overline{A+B\cdot\overline{C}})\cdot(A\cdot D+B)$$

   *d'après l'exercice 3,*

$$A+B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot(\overline{B\cdot\overline{C}})\cdot(A\cdot D+B)=(A+B\cdot\overline{C})+(A\cdot D+B)=(A+A\cdot D)+(B+B\cdot\overline{C})$$

   *d'après l'exercice 8c,*

$$A+B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot(\overline{B\cdot\overline{C}})\cdot(A\cdot D+B)=A+B$$

   (g) $(A\oplus B)\cdot B+A\cdot B$

**Correction :**

*d'après l'exercice 2,*

$$
\begin{aligned}
(A \oplus B) \cdot B + A \cdot B &= (\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}) \cdot B + A \cdot B \\
&= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot B + A \cdot B \\
&= \overline{A} \cdot B + A \cdot B
\end{aligned}
$$

*d'après l'exercice 8a,*

$$= B$$

(h) $A + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$

**Correction :**

$$A + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} = (A + \overline{A} \cdot B) + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

*d'après l'excercice 3,*

$$A + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} = (A + B) + (\overline{A + B}) = 1$$

9. Démontrer que toute fonction à trois variables $F(A,B,C)$ est égale à

$$F(A,B,C) = A \cdot F(1,B,C) + \overline{A} \cdot F(0,B,C)$$

**Correction :** *A est une variable booléenne : les deux valeurs qu'elle peut prendre sont* 0 *et* 1 *:*
– *si* $A = 0$, $0 \cdot F(1,B,C) + 1 \cdot F(0,B,C) = F(0,B,C) = F(A,B,C)$ *;*
– *si* $A = 1$, $1 \cdot F(1,B,C) + 0 \cdot F(0,B,C) = F(1,B,C) = F(A,B,C)$.

10. Montrer que les lois de de Morgan s'étendent à un nombre quelconque de variables.

**Correction :**

*(a)* $\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_n}$ *avec* $n \geq 2$. *La démonstration se fait par récurrence sur n (le nombre de variables).*

$n = 2$ *c'est la loi de de Morgan « basique » ;*

$n > 2$ *on utilise l'associativité de* $+$ *et* $\cdot$ *:*

$$
\begin{aligned}
\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n} &= \overline{(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_{n-1}) \cdot A_n} \\
&= \overline{(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_{n-1})} + \overline{A_n} \\
&= (\overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_{n-1}}) + \overline{A_n} \\
&= \overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_{n-1}} + \overline{A_n}
\end{aligned}
$$

*(b)* $\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \cdots \cdot \overline{A_n}$ *avec* $n \geq 2$. *Le raisonnement est similaire.*

11. **Génération et simplification d'expressions logiques**
Considérer la fonction définie par la table de vérité ci-dessous :

| $A$ | $B$ | $C$ | $F(A,B,C)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

(a) Générer une expression logique correspondante :

i. sous forme de sommes de produits ;

**Correction :**

$$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$$

ii. sous forme de produits de sommes.

**Correction :**

$$\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot C}=(A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

(b) Simplifier les deux expressions en utilisant les règles de l'algèbre de Boole.

**Correction :**

*i.*

$$\begin{aligned}
&\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}\\
=&\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+(A+\overline{A})\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot(C+\overline{C})\\
=&\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C+B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\\
=&(A+\overline{A}\cdot C)\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}\\
=&(A+C)\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}\\
=&A\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot C\\
=&A\cdot\overline{B}+(B\oplus C)
\end{aligned}$$

*ii.*

$$\begin{aligned}
&(A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\\
=&(A\cdot A+A\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{C}+B\cdot A+B\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}+C\cdot A+C\cdot\overline{B}+C\cdot\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\\
=&(A+A\cdot B+A\cdot C+A\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{C}+B\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\\
=&A\cdot\overline{A}+A\cdot B\cdot\overline{A}+A\cdot C\cdot\overline{A}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{A}+A\cdot\overline{C}\cdot\overline{A}+B\cdot\overline{C}\cdot\overline{A}+\overline{B}\cdot C\cdot\overline{A}+\\
&A\cdot\overline{B}+A\cdot B\cdot\overline{B}+A\cdot C\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{C}\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}\cdot\overline{B}+\overline{B}\cdot C\cdot\overline{B}+\\
&A\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot C\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{C}\cdot\overline{C}+B\cdot\overline{C}\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot C\cdot\overline{C}\\
=&A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot C+B\cdot\overline{C}\\
=&(A\cdot\overline{B})\cdot(1+C+\overline{C})+\overline{B}\cdot C+(A+1)\cdot(B\cdot\overline{C})\\
=&A\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot C\\
=&A\cdot\overline{B}+(B\oplus C)
\end{aligned}$$