

Architecture des ordinateurs et systèmes d'exploitation

Corrigé du TD 3: Algèbre de BOOLE

Arnaud Giersch

Benoît Meister

Nicolas Passat

1. Montrer comment l'opérateur **et** peut être obtenu à partir des opérateurs **ou** et **non**. De même pour l'opérateur **ou** avec les opérateurs **et** et **non**.

Correction : $\text{non}(a \text{ ou } b) = (\text{non } a) \text{ et } (\text{non } b) \Rightarrow \text{non}((\text{non } a) \text{ ou } (\text{non } b)) = a \text{ et } b$
 $\text{non}(a \text{ et } b) = (\text{non } a) \text{ ou } (\text{non } b) \Rightarrow \text{non}((\text{non } a) \text{ et } (\text{non } b)) = a \text{ ou } b$

2. On note respectivement les opérateurs **ou**, **et**, **xor** et **non** par $+$, \cdot , \oplus et $\bar{}$. Montrer à l'aide de tables de vérité que $A \oplus B = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$ et que $A \oplus B = (A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$

Correction : Tables de vérités :

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \oplus B$	$\bar{A} \cdot B$	$A \cdot \bar{B}$	$\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \oplus B$	$A + B$	$\bar{A} + \bar{B}$	$(A + B) \cdot (\bar{A} + \bar{B})$
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0

3. Montrer que $A + (\bar{A} \cdot B) = A + B$ et que $A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$

Correction : On utilise la distributivité de l'opérateur **ou** sur l'opérateur **et**, et inversement :

$$A + (\bar{A} \cdot B) = (A + \bar{A}) \cdot (A + B) = 1 \cdot (A + B) = A + B$$

$$A \cdot (\bar{A} + B) = (A \cdot \bar{A}) + (A \cdot B) = 0 + (A \cdot B) = A \cdot B$$

4. Déterminer le complément de l'expression $A + \bar{B} \cdot C$

Correction : On utilise les lois de de Morgan ; l'opérateur **et** est prioritaire :

$$\overline{A + \bar{B} \cdot C} = \bar{A} \cdot \overline{\bar{B} \cdot C} = \bar{A} \cdot (B + \bar{C}) = \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{C}$$

5. Montrer que les deux règles d'associativité sont duales, i.e. montrer qu'à partir de la règle d'associativité de l'opérateur **ou**, on peut déduire, en utilisant les lois de de Morgan, l'associativité de l'opérateur **et** (et inversement).

Correction :

$$A + (B + C) = (A + B) + C \Leftrightarrow \overline{A + (B + C)} = \overline{(A + B) + C} \Leftrightarrow \bar{A} \cdot (\bar{B} \cdot \bar{C}) = (\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C}$$

A , B , et C sont des variables muettes. Par changement de variable $\{(\bar{A} \rightarrow A'), (\bar{B} \rightarrow B'), (\bar{C} \rightarrow C')\}$ on obtient la propriété d'associativité du **ou** : $A' \cdot (B' \cdot C') = (A' \cdot B') \cdot C'$

6. Écrire l'expression $\overline{A \oplus B}$ uniquement avec les opérateurs **ou**, **et** et **non**

Correction : D'après 2. :

$$A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A \oplus B} = \overline{\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}} \Leftrightarrow \overline{A \oplus B} = (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + B)$$

7. Montrer que la fonction **nor** forme un groupe logique complet.

Correction : Pour cela, on montre que la fonction **nor** permet d'exprimer tous les opérateurs logiques :

– **non** : $\text{nor}(A, A) = \overline{A}$

– **et** : $\text{nor}(\text{nor}(A, A), \text{nor}(B, B)) = \text{nor}(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \cdot B$

– **ou** : $\text{nor}(\text{nor}(A, B), \text{nor}(A, B)) = \overline{\text{nor}(A, B)} = \overline{\overline{A + B}} = (A + B)$.

8. Simplifier au maximum les expressions logiques suivantes.

(a) $\overline{A} \cdot B + A \cdot B$

Correction :

$$\overline{A} \cdot B + A \cdot B = (\overline{A} + A) \cdot B = 1 \cdot B = B$$

(b) $(A + B) \cdot (A + \overline{B})$

Correction :

$$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A + B \cdot \overline{B} = A + 0 = A$$

(c) $A + A \cdot B$

Correction :

$$A + A \cdot B = A \cdot 1 + A \cdot B = A \cdot (1 + B) = A \cdot 1 = A$$

(d) $A \cdot (A + B)$

Correction :

$$A \cdot (A + B) = (A + 0) \cdot (A + B) = A + 0 \cdot B = A + 0 = A$$

(e) $\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A + B + C + D}$

Correction :

$$\begin{aligned} \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A + B + C + D} &= \overline{(A + B) \cdot (A + B + C + D)} \\ &= \overline{(A + B) \cdot ((A + B) + (C + D))} \end{aligned}$$

donc, d'après l'exercice 8d,

$$= \overline{A + B}$$

(f) $A + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{(B \cdot \overline{C})} \cdot (A \cdot D + B)$

Correction :

$$A + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{(B \cdot \overline{C})} \cdot (A \cdot D + B) = (A + B \cdot \overline{C}) + \overline{(A + B \cdot \overline{C})} \cdot (A \cdot D + B)$$

d'après l'exercice 3,

$$A + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{(B \cdot \overline{C})} \cdot (A \cdot D + B) = (A + B \cdot \overline{C}) + (A \cdot D + B) = (A + A \cdot D) + (B + B \cdot \overline{C})$$

d'après l'exercice 8c,

$$A + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{(B \cdot \overline{C})} \cdot (A \cdot D + B) = A + B$$

(g) $(A \oplus B) \cdot B + A \cdot B$

Correction :

d'après l'exercice 2,

$$\begin{aligned}
(A \oplus B) \cdot B + A \cdot B &= (\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}) \cdot B + A \cdot B \\
&= \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot B + A \cdot B \\
&= \bar{A} \cdot B + A \cdot B
\end{aligned}$$

d'après l'exercice 8a,

$$= B$$

(h) $A + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

Correction :

$$A + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} = (A + \bar{A} \cdot B) + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

d'après l'exercice 3,

$$A + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} = (A + B) + (\bar{A} + \bar{B}) = 1$$

9. Démontrer que toute fonction à trois variables $F(A, B, C)$ est égale à

$$F(A, B, C) = A \cdot F(1, B, C) + \bar{A} \cdot F(0, B, C)$$

Correction : A est une variable booléenne : les deux valeurs qu'elle peut prendre sont 0 et 1 :

– si $A = 0$, $0 \cdot F(1, B, C) + 1 \cdot F(0, B, C) = F(0, B, C) = F(A, B, C)$;

– si $A = 1$, $1 \cdot F(1, B, C) + 0 \cdot F(0, B, C) = F(1, B, C) = F(A, B, C)$.

10. Montrer que les lois de de Morgan s'étendent à un nombre quelconque de variables.

Correction :

(a) $\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_n$ avec $n \geq 2$. La démonstration se fait par récurrence sur n (le nombre de variables).

$n = 2$ c'est la loi de de Morgan « basique » ;

$n > 2$ on utilise l'associativité de $+$ et \cdot :

$$\begin{aligned}
\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n} &= \overline{(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) \cdot A_n} \\
&= \overline{(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1})} + \bar{A}_n \\
&= (\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_{n-1}) + \bar{A}_n \\
&= \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_{n-1} + \bar{A}_n
\end{aligned}$$

(b) $\overline{\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_n} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n$ avec $n \geq 2$. Le raisonnement est similaire.

11. Génération et simplification d'expressions logiques

Considérer la fonction définie par la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$F(A, B, C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(a) Générer une expression logique correspondante :

i. sous forme de sommes de produits ;

Correction :

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C}$$

ii. sous forme de produits de sommes.

Correction :

$$\overline{\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}} = (A + B + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

(b) Simplifier les deux expressions en utilisant les règles de l'algèbre de Boole.

Correction :

i.

$$\begin{aligned} & \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + (A + \bar{A}) \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot (C + \bar{C}) \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \\ &= (A + \bar{A} \cdot C) \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{C} \\ &= (A + C) \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{C} \\ &= A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C \\ &= A \cdot \bar{B} + (B \oplus C) \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} & (A + B + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \\ &= (A \cdot A + A \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{C} + B \cdot A + B \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{C} + C \cdot A + C \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \\ &= (A + A \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{C} + B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) \\ &= A \cdot \bar{A} + A \cdot B \cdot \bar{A} + A \cdot C \cdot \bar{A} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{A} + A \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + B \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot C \cdot \bar{A} + \\ & \quad A \cdot \bar{B} + A \cdot B \cdot \bar{B} + A \cdot C \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{C} \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{C} \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot C \cdot \bar{B} + \\ & \quad A \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot C \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} + B \cdot \bar{C} \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C \cdot \bar{C} \\ &= A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C + B \cdot \bar{C} \\ &= (A \cdot \bar{B}) \cdot (1 + C + \bar{C}) + \bar{B} \cdot C + (A + 1) \cdot (B \cdot \bar{C}) \\ &= A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C \\ &= A \cdot \bar{B} + (B \oplus C) \end{aligned}$$